Wprowadzenie do wprowadzenia do równowagi ogólnej

Łukasz Krzempek

25.05.2023

1 Wstęp - czym jest GE?

Równowaga ogólna (*general equilibrium* - GE) to podstawowa teoria pozwalająca na matematyczną analizę interakcji rynkowych. W przeciwieństwie do równowagi cząstkowej (której przykładem jest analiza popytu i podaży na jednym rynku ceteris paribus), nie przyjmuje żadnych zmienych jako z góry danych (egzogenicznych), a ukazuje je jako rezultat procesów ekonomicznych zachodzących w innym obszarze gospodarki.

Przykład 1 - w analizie cząstkowej rynku herbaty ceny kawy (podobno dobra substytucyjnego), przyjęte na stałym poziomie, traktowane będą jako jeden z czynników wpływających na popyt. Wykorzystanie równowagi ogólnej umożliwi opisanie wzajemnych oddziaływań tych rynków i znalezienie równoległych cen równowagi na obydwu rynkach.

Równowaga ogólna, w najbardziej podstawowym modelu, wymaga spełnienia trzech warunków:

1. Konsument masymalizuje swoją użyteczność - rozwiązanie problemu konsumenta
2. Producent maksymalizuje swój zysk - rozwiązanie problemu producenta
3. Zachodzi czyszczenie się rynków (*market clearing*) - na każdym rynku podaż równa jest popytowi

W niniejszej notatce zajmować się będziemy wyłącznie modelami statycznymi, czyli abstrahującymi od przeszłych i przyszłych stanów gospodarki. Należy pamiętać że w bardziej zaawansowanej analizie makroekonomicznej zdecydowanie częściej spotykane są modele dynamiczne, w których decyzje podejmowane w jednym okresie mają wpływ na stan gospodarki w kolejnych.

Równowaga ogólna stanowi podstawowy framework metodologiczny współczesnej makroekonomii (makroekonomia oparta na mikropodstawach, *micro-founded macroeconomics*) . Opierają się na niej takie klasy modeli jak:

- DSGE (*Dynamic Stochastic General Equilibrium*)
- RBC (*Real Business Cycle*)
- OLG (*Overlapping Generations*)
- Zainteresowanym polecam modele z heterogenicznymi agentami, np. SIM (*Standard Incomplete Markets*)[1]

wykorzystywane zarówno w prognozowaniu (banki, fundusze inwestycyjne, ministerstwa finansów), jak i w badaniach ekonomicznych.

2 Gospodarka wymiany

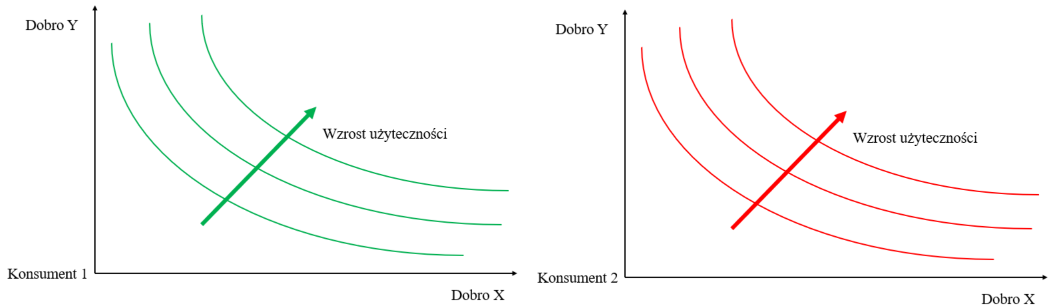
Gospodarka wymiany (*exchange economy*) to skrajnie uproszczony przypadek w którym nie zachodzi produkcja a agenci nie otrzymują dochodu z żadnych innych źródeł. Każdy z nich dysponuje jedynie początkowym zasobem dóbr, które może wymieniać z innymi w dobrowolnych transakcjach.

2.1 Diagram Edgewortha

Diagram Edgewortha (Skrzynka Edgewortha, *Edgeworth Box*) obrazuje bardzo uproszczony przykład gospodarki wymiany z dwoma konsumentami. Uzyskuje się go poprzez nałożenie na siebie przeciwstawnie obróconych krzywych obojętności obu konsumentów.

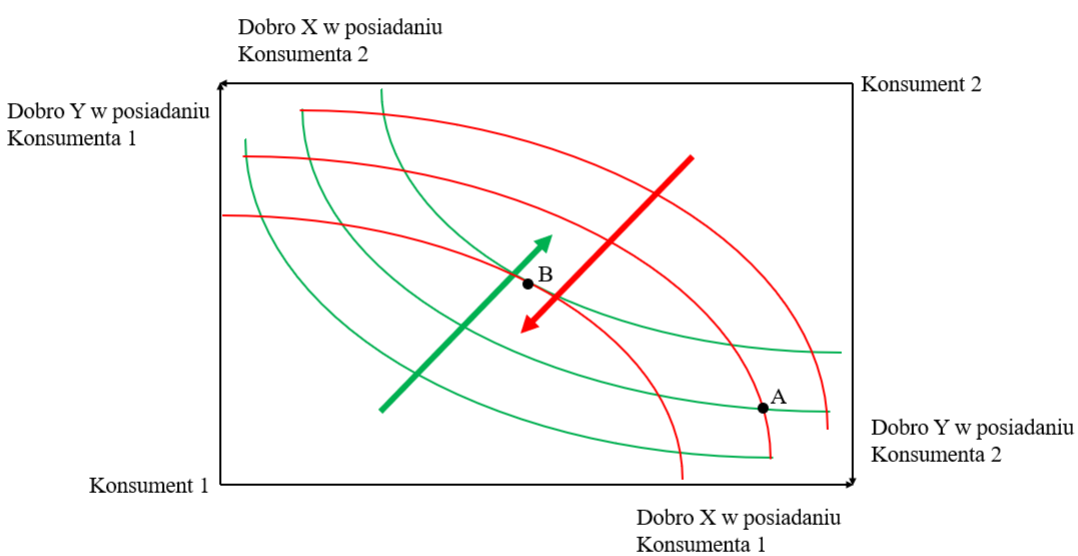
[1] Do zainspirowania się: fundacyjny dla tej klasy paper Huggeta: http://www.liuyanecon.com/wp-content/uploads/Huggett-1993.pdf oraz współczesny paper dr. Kopca: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0014292122000617

Rysunek 1. Wykresy krzywych użyteczności dla Konsumenta 1 i Konsumenta 2



Szerokość Skrzynki Edgewortha to łączny zasób dobra X w gospodarce, a jej wysokość to łączny zasób dobra Y. Kształt krzywych użyteczności odpowiada prawu malejącej użyteczności krańcowej (im więcej danego dobra posiada konsument, tym mniejszą użyteczność czerpie z każdej jego kolejnej jednostki).

Rysunek 2. Diagram Edgewortha



Załóżmy, że w sytuacji początkowej znajduemy się w punkcie A. Konsument 1 posiada większość dobra X, natomiast Konsument 2 - dobra Y. Zauważmy, że w punkcie B obaj konsumenci uzyskują użyteczność wyższą niż w A. Wymiana jest wzajemnie korzystna, zatem do niej dojdzie.

W punkcie B krzywe użyteczności Konsumenta 1 i Konsumenta 2 są do siebie styczne. W takiej sytuacji nie istnieje punkt, dla którego jeden z konsumentów miałby użyteczność co najmniej taką jak w B, a drugi wyższą niż w B. Alkoacja taka nazywa się **Pareto-optymalną**. Nie dochodzi w niej do dalszych wymian, ponieważ aby którykolwiek z konsumentów mógł na takiej wymianie zyskać, drugi musiałby stracić, na co się nie zgodzi.

2.2 Równowaga ogólna w gospodarce wymiany

Znając początkowe wyposażenie obu konsumentów oraz ich prefernecje możemy wyliczyć, jaka alokacja będzie rezultatem wymiany. Załóżmy, że Konsument 1 wyposażony jest na początku w ilość X_0 dobra X oraz Y_0 dobra Y, a jego funkcja użyteczności to $U_1(x_1, y_1) = x_1^{\alpha} y_1^{1-\alpha}$, gdzie x_1i y_1 to ilość dobra X i Y będącego w jego posiadaniu. Dla ułatwienia znormalizujemy łączną ilość każdego z dóbr w gospodarce do 1, wówczas Konsument 2 ma na początku $1 - X_0$ dobra X i $1 - Y_0$ dobra Y. Jego funkcja użyteczności to $U_2(x_2, y_2) = x_2^{\beta} y_2^{1-\beta}$.

Aby rozwiązać problem konsumenta 1, musimy wyznaczyć jego ograniczenie budżetowe. Oznaczmy przez $p_X$cenę dobra X i przez p_Y cenę dobra Y. Majątek Konsumenta 1 wynosi zatem $p_X \cdot X_0 + p_Y \cdot Y_0$. Każdy koszyk (x_1, y_1), jaki będzie w stanie nabyć, musi spełniać zatem warunek $p_X \cdot x_1 + p_Y \cdot y_1 = p_X \cdot X_0 + p_Y \cdot Y_0$. Pozwala nam to skonstruować funkcję Lagrange'a:

$$L(x_1, y_1, \lambda) = x_1^{\alpha} y_1^{1-\alpha} - \lambda(p_X \cdot x_1 + p_Y \cdot y_1 - p_X \cdot X_0 - p_Y \cdot Y_0)$$

i uzyskać warunki pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned} \alpha x_1^{\alpha-1} y_1^{1-\alpha} &= \lambda p_X \\ (1-\alpha) x_1^{\alpha} y_1^{-\alpha} &= \lambda p_Y \end{aligned}$$

z których, po uwzględnieniu ograniczenia budżetowego, wyliczyć można rozwiązanie:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha \cdot (X_0 + \frac{p_Y}{p_X} Y_0) \\ y_1 &= (1-\alpha) \cdot (\frac{p_X}{p_Y} X_0 + Y_0) \end{aligned}$$

Analogicznie rozwiązuje się problem Konsumenta 2 (do samodzielnego poćwiczenia), uzyskując rozwiązanie:

$$x_2 = \beta \cdot \left[(1 - X_0) + \frac{p_Y}{p_X} \cdot (1 - Y_0)\right]$$
$$y_2 = (1 - \beta) \cdot \left[\frac{p_X}{p_Y} \cdot (1 - X_0) + (1 - Y_0)\right]$$

Co pozostawia do rozwiązania problem czyszczenia się rynków. Warunek *market clearing*, odpowiednio dla rynku dobra X i dobra Y, ze względu na zastosowaną normalizację, wyrażony będzie przez:

$$x_1 + x_2 = 1$$
$$y_1 + y_2 = 1$$

Wstawiając do dowolnego z powyższych równań wyliczone wcześniej rozwiązania problemów konsumentów, dostaniemy stosunek cen:

$$\frac{p_Y}{p_X} = \frac{1 - \alpha X_0 - \beta(1 - X_0)}{\alpha Y_0 + \beta(1 - Y_0)}$$

Dzięki któremu możemy prosto policzyć ile dobra X i Y posiadał będzie każdy z konsumentów.

3 Równowaga ogólna w gospodarce produkcyjnej

Przeanalizujemy teraz najprostszy możliwy przykład równowagi ogólnej w gospodarce, w której istnieją firmy wytwarzające dobra oraz konsumenci czerpiący z nich użyteczność[2]. Założymy że istnieje dokładnie jedna firma, wytwarzająca jeden produkt, oraz jeden konsument[3]. Rozwiązując ogólną postać problemu konsumenta i producenta dojdziemy, dzięki warunkowi czyszczenia się rynków, do konkretnej postaci rozwiązania.

3.1 Problem konsumenta

Konsument czerpie użyteczność z czasu wolnego n oraz konsumpcji dobra w ilości c, nabywanego za cenę p. Jego funkcja użyteczności przyjmuje postać $u(c, n) = c^\alpha n^{1-\alpha}$,

[2]na bazie Zad. 3.12 ze zbioru prof. Woźnego: https://lwozny.github.io/assets/pdf/Lista_zadan.pdf

[3]Założenie to nie jest tak abstrakcyjne jak mogłoby się wydawać. W sporej gamie modeli wielu (a nawet nieskończenie wielu) agentów zastąpić możemy jednym, agregującym ich zachowanie. Zainteresowanych odsyłam do pojęcia *representative agent*. Pierwszy z brzegu paper na ten temat: https://pubs.aeaweb.org/doi/pdfplus/10.1257/jep.10.2.169

gdzie $\alpha \in (0,1)$. Dysponuje on 1 jednostką czasu, który może poświęcać na pracę l za wynagrodzenie w lub czas wolny n, oraz k jednostkami kapitału, który wynajmuje firmie w cenie r.

Należy pamiętać, że ceny są względne - rozwiązując model równowagi ogólnej otrzymamy zawsze jedynie ilorazy cen, a nie nominalne jednostki. Można wobec tegu ułatwić sobie rozwiązywanie, przyjmując konkretną wartość jednej z cen, a pozostałe będą wówczas wyrażone w stosunku do niej. Założenie takie nazywa się *numéraire*. Przyjmijmy wobec tego $p = 1$.

Problem konsumenta przyjmuje zatem następującą postać:

$\max_{(c,n)} u = c^\alpha n^{1-\alpha}$ pod warunkiem $c = (1-n) \cdot w + k \cdot r$ (ograniczenie budżetowe - wydatki konsumenta równe są jego dochodom z pracy i kapitału)

Zapisujemy funkcję Lagrange'a:

$$L(c, n, \lambda) = c^\alpha n^{1-\alpha} - \lambda \cdot (c + n \cdot w - w - k \cdot r)$$

I otrzymujemy warunki pierwszego rzędu:

$$\alpha c^{\alpha-1} n^{1-\alpha} = \lambda$$
$$(1-\alpha) c^\alpha n^{-\alpha} = \lambda w$$

Które, w połączeniu z ograniczeniem budżetowym dają rozwiązanie:

$$\begin{cases} c &= \alpha \cdot (w + k \cdot r) \\ n &= (1-\alpha) \cdot (1 + k\frac{r}{w}) \\ l &= \alpha - (1-\alpha) \cdot k\frac{r}{w} \end{cases}$$

3.2 Problem producenta

Załóżmy, że przedsiębiorstwo produkcyjne działa na rynku doskonale konkurencyjnym, czyli jego zysk jest równy 0 (w przeciwnym wypadku konsument musiałby być właścicielem przedsiębiorstwa, do którego trafiałby jego zysk[4]). Przedsiębiorstwo najmuje od producenta pracę L w cenie w i kapitał K w cenie r, sprzedając mu następnie dobro w ilości q po cenie p (którą jak pamiętamy znormalizowaliśmy do 1). Firma posługuje się

[4]Nie jest to wbrew pozorom przekładanie z jednej kieszeni do drugiej - pamiętajmy o założeniu reprezentatywnego agenta i tym, że nasz konsument może symbolizować na przykład continuum konsumentów

technologią produkcyjną $q(K,L) = K^\beta L^{1-\beta}$, gdzie $\beta \in (0,1)$. Problemem producenta jest wobec tego:

$$\max_{K,L} \pi(K,L) = K^\beta L^{1-\beta} - w \cdot L - r \cdot K$$

Co daje nam warunki pierwszego rzędu:

$$\beta K^{\beta-1} L^{1-\beta} = r$$
$$(1-\beta) K^\beta L^{-\beta} = w$$

Z czego dostajemy:

$$K = \frac{\beta}{1-\beta} \cdot \frac{w}{r} \cdot L \tag{1}$$

Wstawiając to do warunku zerowego zysku ($\pi(K,L) = 0$) mamy ponadto:

$$w = \beta^{\frac{\beta}{1-\beta}} \cdot (1-\beta) \cdot r^{-\frac{\beta}{1-\beta}} \tag{2}$$

3.3 Market clearing i równowaga ogólna

Przyrównując do siebie strony popytowe i podażowe poszczególnych rynków (kolejno pracy, kapitału i dobra konsumpcyjnego) dostaniemy:

$$L = \alpha - (1-\alpha) \cdot k \frac{r}{w} \tag{3}$$

$$K = k \tag{4}$$

$$\alpha \cdot (w + k \cdot r) = K^\beta L^{1-\beta} \tag{5}$$

Parametrami które znamy są α, β, k. Naszym celem jest znalezienie cen w, r, decyzji konsumenta c, n, l, oraz decyzji producenia q, K, L. Wstawiając do (3) L wyliczone z (1) oraz w wyliczone z (2) i uwzględniając trywialną równość (4) dostajemy:

$$r = \alpha^{1-\beta} \cdot \beta^\beta \cdot (1-\beta)^{(1-\beta)} \cdot (1 - \alpha + \frac{1-\beta}{\beta})^{\beta-1} \cdot k^{\beta-1}$$

po wstawieniu czego do (2) możemy uzyskać:

$$w = \alpha^{-\beta} \cdot \beta^\beta \cdot (1-\beta)^{(1-\beta)} \cdot (1 - \alpha + \frac{1-\beta}{\beta})^{\beta} \cdot k^{\beta}$$

Znając ceny możemy wstawić je do równań które uzyskaliśmy rozwiązując problem konsumenta i policzyć c, n oraz l:

$$\begin{cases} c &= \alpha^{1-\beta} \cdot \beta^{\beta} \cdot (1-\beta)^{(1-\beta)} \cdot \left[(1-\alpha+\frac{1-\beta}{\beta})^{\beta} + (1-\alpha+\frac{1-\beta}{\beta})^{\beta-1}\right] \cdot k^{\beta} \\ n &= (1-\alpha) \cdot \left[1+\alpha \cdot (1-\alpha+\frac{1-\beta}{\beta})^{-1}\right] \\ l &= \alpha - (1-\alpha) \cdot \left[\alpha \cdot (1-\alpha+\frac{1-\beta}{\beta})^{-1}\right] \end{cases}$$

Rozwiązanie problemu producenta, za sprawą czyszczenia się rynków, jest dualne względem konsumenta:

$$\begin{cases} q &= c \\ K &= k \\ L &= l \end{cases}$$

4 Równowaga ogólna a dobrobyt

Wróćmy w tym momencie do pojęcia Pareto-optymalności. Zastanawiać by się można, czy stan gospodarki, do którego prowadzi zdecentralizowane podejmowanie decyzji w warunkach konkurencji mógłby być zmieniony w sposób korzystny (a przynajmniej neutralny) dla wszystkich agentów w modelu. Kwestie te rozstrzga **Pierwsze twierdzenie ekonomii dobrobytu** (*First welfare theorem*):

Alokacja uzyskana w równowadze konkurencyjnej jest zawsze Pareto-efektywna

Co więcej, zachodzi również zależność w kierunku przeciwnym, znana jako **Drugie twierdzenie ekonomii dobrobytu** (*Second welfare theorem*):

Każda alokacja Pareto-efektywna dla danych parametrów gospodarki może zostać uzyskana w zdecentralizowanej równowadze konkurencyjnej dla pewnej alokacji początkowej

Dowód pierwszego twierdzenia ekonomii dobrobytu uzyskać można rozwiązując problem tzw. wszechwiedzącego planisty, czyli maksymalizując użyteczność przy danych zasobach i ograniczeniach technicznych. Dla rozwiązywanego w punkcie 3. przykładu będzie to:

$$\max_{(c,n,\lambda)} L(c,n,\lambda) = c^{\alpha} n^{1-\alpha} - \lambda(c - k^{\beta}(1-n)^{1-\beta})$$

(Rozwiązanie pozostawiam do poćwiczenia, prawidłowe wyniki, a zarazem dowód FWT, są identyczne jak w modelu rozwiązywanym wyżej.

Uwaga: Żadne z twierdzeń ekonomii dobrobytu nie implikuje, że rzeczywista gospodarka jest Pareto-efektywna. Należy pamiętać o szeregu założeń stojących za twierdzeniami (m.in. rynki doskonale konkurencyjne, kompletność rynków, pełna informacja, brak efektów zewnętrznych), których naruszenie prowadzi do znaczących odchyleń od efektywności.