

Teoria gier

Krzysztof Stroiński

22.05.2023

1 Wstęp

Teoria gier to nauka o strategicznym podejmowaniu decyzji w warunkach kooperacji i konfliktu. W wielu sytuacjach nie ma komunikacji między graczami - gracz pierwszy działa bez informacji o decyzji podejmowanej przez drugiego gracza i vice versa. W większości przypadków gdyby umożliwiono graczom komunikację i współpracę, wynik mógłby być zupełnie inny niż w przypadku braku kooperacji.

2 Teoria

Kluczowym pojęciem w teorii gier jest równowaga Nasha. To optymalny punkt w grze, który maksymalizuje wybór jednostki przyjmując wybory jego przeciwników za ustalone.

Schemat uzyskania równowagi Nasha to zaznaczanie najlepszych odpowiedzi na każdą decyzję drugiego gracza. Efektem tego jest przynajmniej jeden punkt, będący równowagą. Punkt ten nie musi być optymalny w sensie Pareta.

Porównując strategie w grze często można zauważyć, że jedna strategia jest lepsza w sensie Pareto od drugiej strategii. Oznacza to, że można polepszyć wynik jednego z graczy bez pomniejszenia wyniku drugiego. Jeżeli przyjęcie strategii A da graczom wypłaty (4,3), to jest ona Pareto lepsze od strategii B, z której gracze otrzymają (3,3).

Rozpatrzmy poniższą grę. Uczestniczy w niej dwóch graczy - gracz 1 ma do wyboru strategię G, S, D, a gracz drugi L, S, P.

	L	S	P
G	3,3	0,3	0,0
S	3,0	2,2	0,2
D	0,0	2,0	1,1

Równowagi Nasha uzyskujemy poprzez znalezienie pary wypłat będącymi najlepszą odpowiedzią na daną strategię drugiego gracza. Najlepszą odpowiedzią gracza 2 na strategię G będzie L lub S, na strategię S będzie S lub P, natomiast na strategię D gracz drugi odpowie przez wybór strategii P. Z tego widzimy, że równowagi Nasha znajdują się na przekątnych tej macierzy wypłat: (3,3), (2,2), (1,1).

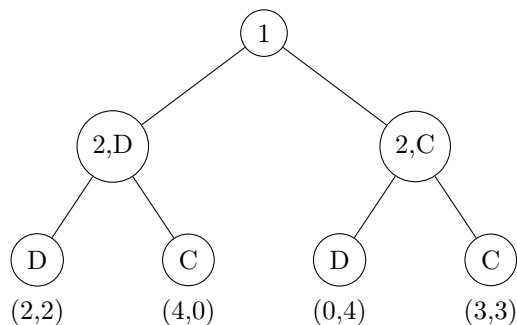
Mówiąc o strategiach, w teorii gier wyróżniamy ich dwa typy: strategię czystą i mieszaną. Strategia czysta jest zawsze wybierana przez gracza ze stuprocentowym prawdopodobieństwem. Nie ma innej strategii, która byłaby równie dobra.

Strategia mieszana natomiast jest mieszanką dwu lub więcej strategii, np. z prawdopodobieństwem 30 proc. gracz wybierze strategię A, a z prawdopodobieństwem 70 proc. strategię B.

Gra może być przedstawiona w postaci macierzy wypłat (tabelka), lub też w postaci ekstensywnej (drzewko). W postaci ekstensywnej ukazany jest ciąg decyzji graczy. Gracz 1 dokonuje wyboru jako pierwszy, a następnie gracz 2 wybiera strategię w odpowiedzi na wybór gracza 1.

Przyjrzyjmy się grze w postaci ekstensywnej. Gracz pierwszy ma do wyboru strategię D lub C - założmy, że wybierze C. Gracz 2 stanie wtedy przed wyborem: D, która daje (0,4), lub też C, która

wypłaca (3,3). Co oczywiste, gracz 2 będzie chciał maksymalizować swoją wypłatę, więc wybierze strategię D.



Gracz 1 może przewidzieć logikę stojącą za wyborem strategii gracza drugiego. Wie on, że obaj maksymalizują swoją wypłatę. Gracz 2 zawsze będzie preferował wypłatę 4 ponad 3, ale wtedy gracz 1 nie otrzyma nic. Aby zapobiec takiej sytuacji, gracz 1 powinien zawsze wybrać strategię D. W takim wypadku gracz 2 będzie miał do wyboru strategię D, która daje wypłaty (2,2), lub strategię C, która wypłaca (4,0). Co oczywiste, gracz 2 wybierze strategię D.

Zauważmy, że strategia C-C jest Pareto lepsza niż strategia D-D, ale gracz 1 nigdy nie zdecyduje się na wybranie strategii D, ponieważ wie, że najprawdopodobniej nie otrzyma on żadnej wypłaty.

Strategia jest ściśle zdominowana jeżeli pod każdym względem strategia A dominuje strategię B dla gracza podejmującego decyzję.

3 Zadania

Zadanie 1:

Znajdź równowagi Nasha w grze o następującej postaci strategicznej:

	L	O	P
G	1,0	1,2	2,-1
S	1,1	1,0	0,-1
D	-3,-3	-3,-3	-3,-3

W tym zadaniu możemy stwierdzić, że nie ważne co wybierze gracz 2, strategia D przyniesie najgorszy wynik. Można powiedzieć, że jest ona ściśle zdominowana i może zostać wykreślona. Następnie można zauważyć że strategia P jest dla drugiego gracza zawsze opcją najgorszą, a więc również może zostać wykreślona. Pozwala to na rozważanie jedynie gry 2x2 posiadającej dwie równowagi Nasha: SL oraz GO.

	L	O
G	1,0	1,2
S	1,1	1,0

Warto zauważyć że dowolna decyzja gracza pierwszego daje mu wypłatę 1 a więc jest to obojętne z jego perspektywy która strategię wybierze.

Zadanie 2:

Znajdź równowagę Nasha w poniższej grze:

	L	P
G	2,2	-1,-1
D	-1,-1	1,1

Strategie DL i GP dają dużo niższe wypłaty niż pozostałe dwie strategie. Jeżeli gracz 1 wybierze D, to gracz 2 wybierze P. Analogicznie, na strategię G gracza 1 gracz 2 zareaguje wybierając L - GL i DP są równowagami Nasha. Możemy również zauważyć, że GL jest parreto lepsze od DP. Sytuacja ta ma miejsce, gdy możliwe jest polepszenie wypłaty jednego z graczy bez pogorszenia wypłaty drugiego z nich. Przejście z DP (1,1) do GL (2,2) jest dla obu graczy korzystne.

Zadanie 3:

Rozpatrzmy następującą grę:

	A	B	C	D	E
G	-3,-3	5,5	7,3	4,4	1,4
S	6,6	-3,-3	2,-1	0,0	7,-4
P	0,2	1,-1	5,4	2,0	3,6

Na początku macierz wypłat takiej postaci może przerażać, ale istnieje sposób na uproszczenie tego problemu.

Strategie A, B i C wyglądają na dość korzystne (w szczególności jeżeli chodzi o AS i BG i CP), skupmy się zatem na strategii D - może ona zostać zdominowana przez pewną mieszankę pozostałych strategii. Sposób liczenia takowej mieszanki jest dość swobodny, zastosujemy tutaj prostą metodę zgadywania a następnie dostrojenia. Nasza strategia D' musi być lepsza od D . A więc:

$$D_1 > 4, \quad D_2 > 0, \quad D_3 > 0.$$

W pierwszym zgadywaniu można zaproponować:

$$A = 0.2 \quad B = 0.5 \quad E = 0.3$$

Następnie mnożymy wartości przez wypłaty w danej strategii i zapisujemy strategię mieszaną jaka otrzymaliśmy. Daje to nam wypłaty:

$$D_1 = 4.3, \quad D_2 = -1.8, \quad D_3 = 0.9$$

Oznacza to że wszystkie warunki są spełnione oprócz warunku $D_2 > 0$, a zatem należy zwiększyć udział strategii A, ponieważ daje ona największą wypłatę w odpowiedzi na strategię S), natomiast można to wykonać odpowiednio względem dowolnej z pozostałych strategii.

Dostrojeniem uzyskującym odpowiednie wypłaty na każdej z pozycji jest na przykład:

$$A = 0.39, \quad B = 0.40, \quad E = 0.21$$

Takie dostrojenie spełnia warunki $D_1 > 4$, $D_2 > 0$, $D_3 > 0$, co umożliwia wykreślenie strategii D - jest ona zdominowana przez wcześniej wspomnianą strategię mieszaną. Bardziej formalnym językiem: istnieje lepsza kombinacja liniowa pozostałych strategii, a zatem strategia D jest zdominowana.

Idąc dalej tą logiką dochodzimy do punktu, w którym na strategię G gracz 2 odpowie B (5,5), a na strategię S gracz 2 odpowie A (6,6). Są to dwie równowagi Nasha w tej grze.