Teoria konsumenta

Krzysztof Warzocha

25.05.2023

1 Wstęp

Podstawową cechą konsumenta jest fakt czerpania satysfakcji (dodatniej użyteczności) z konsumpcji:

$$u(c) > 0$$

Użyteczność ta może zostać przedstawiona za pomocą funkcji. Funkcje użyteczności mogą różnić się między konsumentami i konsumowanymi dobrami:

$$u(x_1) = ln(x)$$
$$u(x_2) = 3x$$
$$u(x_3) = \frac{1}{2}x$$

Konsumpcja dwóch dóbr może być ze sobą powiązana, np.

$$u(x_4, x_5) = min(x_4, x_5)$$

Ważna może być interpretacja pochodnych funkcji użyteczności: jeżeli pierwsza pochodna jest dodatnia, funkcja jest rosnąca, czyli im więcej dobra konsumujemy, tym szczęśliwsi jesteśmy.

Gdy druga pochodna jest niższa od zera, konsument cechuje się malejącą użytecznością krańcową (każda kolejna jednostka dobra dostarcza mu coraz mniej użyteczności).

Jeśli druga pochodna jest dodatnia to występuje zjawisko rosnącej użyteczności krańcowej (każda kolejna jednostka dobra dostarcza coraz więcej użyteczności).

Gdy druga pochodna jest równa zero, każda kolejna jednostka przynosi ten sam przyrost użyteczności.

Jeśli pierwsza pochodna funkcji użyteczności dobra jest dodatnia, konsument dąży do najwyższego poziomu konsumpcji danego dobra, jednak funkcjonuje w warunkach ograniczonych zasób, zatem jego konsumpcja nie może być większa od posiadanego budżetu (m):

$$m \geq c$$

Budżet to suma wszystkich dochodów i oszczędności konsumenta (L - ilość pracy, w - płaca, r - stopa procentowa, k - poziom kapitału):

$$m = wL + rk$$

Konsument zazwyczaj czerpie również użyteczność z czasu wolnego (n):

$$U(n) > 0$$

Konsument może przeznaczać czas na pracę lub czas wolny. Konsument ma ograniczony zasób czasu (równy np. 1):

$$1 = L + n$$

Konsument, jeśli rozpatrujemy jego wybory w więcej niż jednym okresie, nie musi wydać całych swoich dochodów. Część może zaoszczędzić (o ile nie jest to ostatni okres jego życia), wtedy oszczędności wynoszą s i powiększają one całkowity budżet konsumenta:

$$m = c + s$$

Decyzje konsumenta często odbywają się w warunkach ryzyka. Wtedy konsument podejmuje decyzje na podstawie oczekiwanej użyteczności z x oznaczoną przez $E(u(x))$, gdzie p to prawdopodobieństwo zjawiska $<0,1>$:

$$E(u(x)) = px + (1 - p) * 0$$

2 Preferencje

Podmiot może:

- być obojętny wobec dóbr: $a \sim b$;
- ściśle preferować któreś z dóbr $a > b$ (zawsze wybiera a);
- słabo preferować któreś z dóbr $a \geq b$ (czasem wybierze a, czasem będzie obojętny).

Preferencje muszą być:

- kompletne (albo obojętność, albo ścisła/słaba preferencja);
- przechodnie (jeśli a>b i b>c to a>c). Jeżeli $B > A,\ A > C,\ C > B$ to mamy sprzeczność, bo B>A>C, więc B musi być preferowane nad C;
- (stałe – nie zmieniają się w analizowanym modelu).

Wyznaczanie krzywych obojętności dla dwóch dóbr:

Michał poszedł do restauracji „płacisz i jesz ile chcesz", gdzie mógł jeść dowolną ilość kawałków sernika (y) lub pizzy (x). Użyteczność z kawałków sernika jest liniowa i wynosi 3 utyle za kawałek, jednak po 3 kawałku Michał jest zasłodzony, więc kolejna kawałki nie przynoszą mu już satysfakcji. Użyteczność z jedzenia pizzy to funkcja $u(x) = \sqrt{x}$. Naszkicuj krzywe obojętności dla Michała.
Krok 1 – wyznaczmy funkcje użyteczności

$$U(x) = \sqrt{x}$$

$$U(y) = min(3y, 9)$$
$$U(x, y) = \sqrt{x} + min(3y, 9)$$

Krok 2 - przekształcamy, aby otrzymać funkcję $y(x)$ (traktujemy $u(x, y)$ jak liczbę i przekształcamy, żeby mieć samo y po lewej stronie) dla $y \leq 3$:

$$y = \frac{(u(x, y) - \sqrt{x})}{3}$$

Krok 3 - narysuj krzywe obojętności (podpowiedź: podstaw pod $u(x, y)$ jakąś liczbę, żeby ładnie wam wyszło, zacznij od osi OY bądź OX podstawiając 0 pod y lub x).

3 Wybór między dwoma dobrami przy ograniczeniu budżetowym

Ola czerpie przyjemność z oglądania filmów(f) i wyjść do teatru(t). Funkcja użyteczności Oli wygląda następująco:
$$u(f, t) = \frac{1}{3} \ln f + \frac{2}{3} \ln t$$
Jej budżet wynosi 9, koszt wyjścia na film 1, a do teatru 3. Wybierz optymalną konsumpcję.

Krok 1: wyznacz lagranżjan (wyznacz funkcję użyteczności, ograniczenie budżetowe i złącz w sekwencji: funkcja użyteczności+ λ(budżet-ilość dobra x * cena x - ilość dobra y * cena y):

$$9 = f + 3t$$

$$L(f, t, \lambda) = \frac{1}{3} lnf + \frac{2}{3} lnt + \lambda(9 - f - 3t)$$
Krok 2: pochodne lagranżjanu po dobrach i podstawiamy do λ i wyznaczamy jedno dobro w zależności od drugiego
$$\frac{\partial L}{\partial f} = \frac{1}{3} f - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{3} f$$

$$\frac{\partial L}{\partial f} = \frac{2}{3}t - 3\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{2}{9}t$$

$$\lambda = \lambda$$

$$\frac{1}{3}f = \frac{2}{9}t \rightarrow t = \frac{2}{3}f$$

Krok 3: podstawiamy do ograniczenia budżetowego:

$$9 = f + 2f ß 3f = 9 ß f = 3$$

$$t = \frac{2}{3} * 3 = 2$$

Dekompozycja Hicksa - sekwencja:

1. Pierwotne ograniczenie budżetowe (zaznaczamy punkty gdzie konsumujemy wyłącznie jedno dobre na osiach OY i OX i łączymy).
2. Wtórne ograniczenie budżetowe (zmieniamy punkt na jednej z osi, w zależności od tego, cena którego dobra się zmienia).
3. Rysujemy krzywą obojętności styczną (optymalną) dla pierwszego i drugiego ograniczenia budżetowego.
4. Wyznaczamy nowe ograniczenie budżetowe **równoległe** do ograniczenia wtórnego (po zmianie ceny) i styczne z pierwotną funkcją użyteczności.

Kluczowa jest ta sama użyteczność co na początku.
Dekompozycja Słuckiego - sekwencja:

1. Pierwotne ograniczenie budżetowe (zaznaczamy punkty gdzie konsumujemy wyłącznie jedno dobre na osiach OY i OX i łączymy).
2. Wtórne ograniczenie budżetowe (zmieniamy punkt na jednej z osi, w zależności od tego, cena którego dobra się zmienia).
3. Rysujemy krzywą obojętności styczną (optymalną) dla pierwszego i drugiego ograniczenia budżetowego.
4. Wyznaczamy nowe ograniczenie budżetowe **równoległe** do ograniczenia wtórnego (po zmianie ceny) i **przechodzące** przez pierwotną równowagę.

Kluczowe jest, żeby nowe ograniczenie przechodziło przez dawny punkt równowagi – nowa krzywa użyteczności.

Graficzne przedstawienie obu dekompozycji znajduje się na końcu dokumentu: 1 i 2.

4 Wybór między pracą, a czasem wolnym

Nikol czerpie użyteczność z konsumpcji i czasu wolnego. Jej funkcja użyteczności to:

$$u(c, n) = \frac{1}{3}ln(c) + \frac{2}{3}ln(n)$$

Aby zarobić na konsumpcję musi pracować. Za pracę otrzymuje wynagrodzenie w. Policz optymalny poziom pracy l i konsumpcji w. Sprawdź czy ilość pracy i konsumpcji rośnie, czy spada wraz ze wzrostem wynagrodzenia.

Krok 1: Wyznacz lagranżjan podobnie jak w zadaniu z dwoma dobrami

$$u(c, n) = \frac{1}{3}ln(c) + \frac{2}{3}ln(n)$$

$$c = wl$$
$$L + n = 1 \rightarrow L = 1 - n$$
$$c = w(1-n) \rightarrow c = w - wn$$
$$L(c, n, \lambda) = \frac{1}{3}ln(c) + \frac{2}{3}ln(n) + \lambda(w - wn - c)$$

Krok 2: Zróżniczkuj po c i n. Przyrównaj wyniki do siebie:

$$\frac{\partial L}{\partial c} = \frac{1}{3}c - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{3}c$$
$$\frac{\partial L}{\partial 5} = \frac{2}{3}c - \lambda w = 0 \rightarrow \lambda = \frac{2}{3}nw$$
$$\lambda = \lambda$$
$$\frac{2}{3}nw = \frac{1}{3}c \rightarrow c = \frac{1}{2}nw$$

Krok 3: Wstaw otrzymany wynik do ograniczenia budżetowego, wyliczamy niewiadome:

$$\frac{1}{2}nw = w - wn \rightarrow 3nw = 2w \rightarrow n = \frac{2}{3}$$
$$L + n = 1 \rightarrow L = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$
$$c = \frac{1}{3}w$$

Krok 4: Wyznaczamy funkcje zmiennych L i c w zależności od w (badamy czy zmienią się przy zmianie w):

$$c = \frac{1}{3}w$$

$$\frac{\partial c}{\partial w} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{\partial L}{\partial w} = 0$$

Zatem przy wroście w rośnie konsumpcja, a podaż pracy nie zmienia się.

5 Wybór konsumpcji między okresami

Konsument wybiera między konsumpcją w dwóch okresach. W pierwszym okresie konsumpcja jest równa płacy jaką dostaje pomniejszonym o oszczędności jakie czyni, a w drugim okresie oszczędnościom powiększonym o stopę procentową r. Oblicz optymalne poziomy c_1, c_2 i r. Sprawdź czy zmiana parametru β wpływa na konsumpcję w drugim okresie.
Krok 1: funkcje użyteczności i ograniczenia budżetowe:

$$u(c_1, c_2) = \ln c_1 + \beta \ln c_2$$
$$c_1 = lw + s$$
$$c_2 = (1+r)s \quad \rightarrow \quad s = \frac{c_2}{1+r}$$
$$lw = c_1 - \frac{c_2}{1+r}$$

Krok 2: lagranżjan i pochodne po konsumpcjach:

$$L(c_1, c_2, \lambda) = \ln c_1 + \beta ln c_2 + \lambda(lw - c_1 - \frac{c_2}{1+r})$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_1} = \frac{1}{c_1} - \lambda = 0 \to \lambda = \frac{1}{c_1}$$
$$\frac{\partial L}{\partial c_2} = \frac{\beta}{c_2} - \frac{\lambda}{1+r} = 0 \to \lambda = \frac{\beta(1+r)}{c_2}$$

Krok 3: liczymy konsumpcję w jednym okresie w zależności od konsumpcji w drugim, podstawiamy do ograniczenia budżetowego, obliczamy niewiadome:

$$\lambda = \lambda$$
$$\frac{\beta(1+r)}{c_2} = \frac{1}{c_1} \to c_2 = c_1\beta(1+r)$$

$$lw = c_1 - c_1\beta$$
$$\frac{lw}{1-\beta} = c_1, \quad \beta \neq 0$$
$$c_2 = \frac{lw\beta(1+r)}{1-\beta} \quad \beta \neq 0$$

Krok 4: Obliczamy s w zależności od β, liczymy pochodną po β, sprawdzamy, czy jest dodatnia:

$$s = \frac{lw}{1-\beta}, \quad \beta \neq 0$$
$$\frac{}{\partial\beta} = \frac{lw+1}{(1-\beta)^2} > 0$$

a więc oszczędności rosną wraz ze wzrostem β.

6 Wybór w warunkach ryzyka

Indyczka myśli o spotkaniu z Indykiem w niedzielę na festynie. Użyteczność takiego spotkania wynosi dla niej 12, jednak istnieje szansa, że w sobotę indykowi utną łeb, a wtedy użyteczność spotkania wyniesie 0. Indyczka może się spotkać z indykiem również w piątek i wtedy użyteczność spotkania wyniesie dla niej 6. Dla jakiego prawdopodobieństwa ucięcia łbu Indykowi w sobotę preferowane będzie spotkanie w piątek?

$$E(u(x)) = (1-p) * 12 + p * 0 = 12 - 12p$$
$$6 > 12 - 12p$$
$$p > \frac{1}{2}$$

Hubert jest wielkim fanem włoskiej kuchni. Może pójść do restauracji 1, gdzie z szansą 0.25 kelner dobrze wypowie nazwy wszystkich 16 dań, albo do restauracji 2, gdzie kelner z szansą 0.75 dobrze wypowie nazwy 4 dań. Hubert czerpie użyteczność równą pierwiastkowi liczby dobrze wypowiedzianych dań. Wyznacz czy Hubert jest „risk lover", czy „risk averse".
Równanie dla miłośnika ryzyka:

$$\sum u(x_i)p_i = \sqrt{16} * 0.25 + \sqrt{4} * 0.75 = 4 * 0.25 + 2 * 0.75 = 2.5$$

Równanie dla miłośnika pewności:

$$u\sum(x_i p_i) = \sqrt{(16 * 0,25 + 4 * 0,75)} = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$$

Porównanie:

$$2.5^2 = 6.25 \ < \ 7 = \sqrt{7}^2$$

Wniosek: Hubert jest ostrożny.
Risk lover liczy użyteczność z wartości oczekiwanej (pod funkcję użyteczności podstawiamy wyniki pomnożone przez ich prawdopodobieństwa), a risk averse sumuje użyteczności oczekiwane (podstawiamy wyniki pod funkcję użyteczności, mnożymy wynik funkcji przez prawdopodobieństwo i sumujemy).

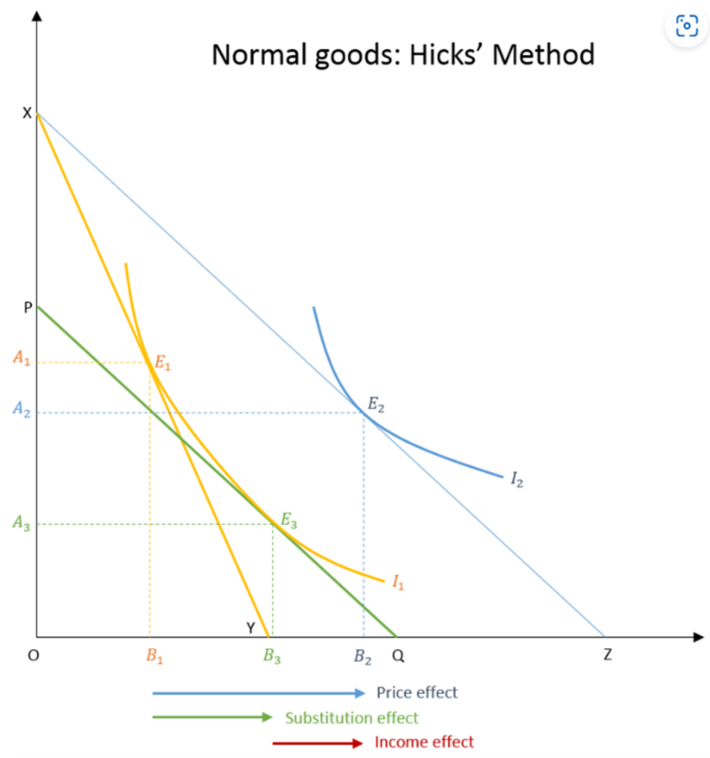

Figure 1: Źródło: https://spureconomics.com/income-and-substitution-effects-hicks-and-slutsky-methods/.

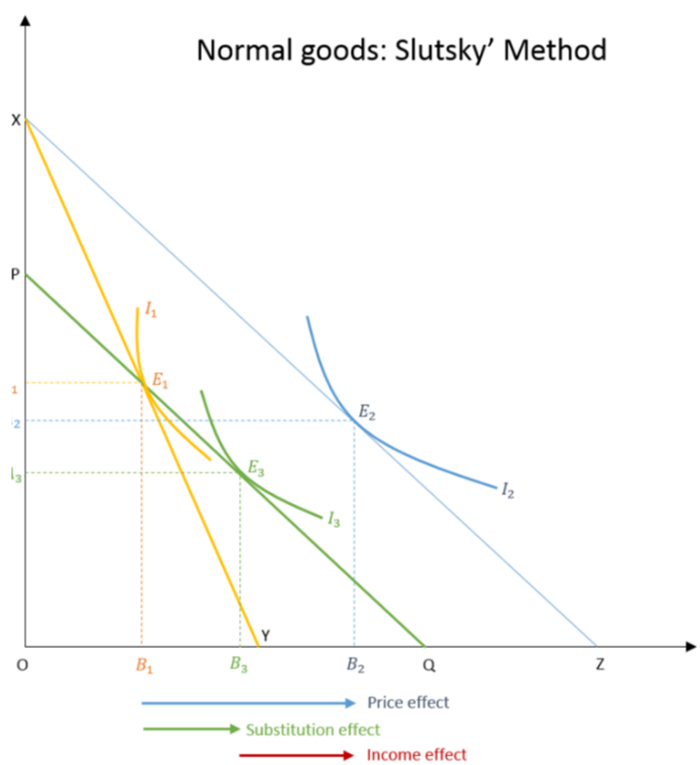

Figure 2: Źródło: https://spureconomics.com/income-and-substitution-effects-hicks-and-slutsky-methods.