Teoria producenta

Michał Orzołek

22.05.2023

1 Wstęp

Producent jest jednym z dwóch podmiotów, którymi zajmuje się mikroekonomia. Problemy w teorii producenta i konsumenta praktycznie nie różnią się od siebie matematycznie, a jedynie pod względem koncepcyjnym. Przedsiębiorstwo maksymalizuje zysk, a konsument użyteczność, ale zasadniczo do rozwiązania tych problemów używamy tych samych narzędzi. Przedstawione tu idee są bardziej intuicyjne niż w przypadku teorii konsumenta, dlatego zajmujemy się nimi w pierwszej kolejności.

2 Maksymalizacja zysku

Pierwszym z omawianych problemów przedsiębiorstwa jest maksymalizacja zysków, czyli różnicy między przychodami a kosztami.

Rozpatrzmy problem firmy, któej funkcja produkcji przyjmuje postać funkcji Cobba-Douglasa. W klasycznym wariancie funkcji Cobba-Douglasa parametry α oraz β sumują się do jedności:

$$\alpha + \beta = 1 => \beta = 1 - \alpha$$

Korzyści skali w takiej funkcji są stałe. Na początku rozwiążmy jednak funkcję bez tego założenia. Mamy:

$$f(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$$

gdzie x_1 to zużycie pierwszego czynnika produkcji, a x_2 to zużycie drugiego czynnika (np. praca i kapitał). Oczywiście firma nie otrzymuje tych czynników za darmo - musi zaopatrywać się w nie na rynku po określonej cenie jednostkowej p_1 oraz p_2.

Z tego względu na powyższą funkcję nakładamy ograniczenie:

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 = B$$

gdzie wyrażenia $x_1 p_1$ i $x_2 p_2$ równe są kosztom całkowitym danego czynnika produkcji. Jeżeli firma zatrudnia 10 pracowników ($x_1 = 10$) i płaci każdemu po 2 jednostki ($p_1 = 2$), to koszty całkowite pracy równe są 20. Koszty całkowite nie mogą przekraczać budżetu B, którym dysponuje firma. Na podstawie tych założeń, korzystając z metody mnożników Lagrange'a układamy następujące równanie:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x_1^\alpha x_2^\beta + \lambda(x_1 p_1 + x_2 p_2 - B) \tag{1}$$

Firma maksymalizuje zysk, zatem pochodne po x_1 i x_2 muszą być równe 0. Przedsiębiorstwo musi również wydać cały swój budżet na produkcję, w przeciwnym wypadku niespełnione zostanie założenie o maksymalizacji zysku (zwiększenie nakładów na produkcję oznaczałoby wzrost zysku - firma musi znaleźć się w miejscu, w którym nie może ponieść większych nakładów). Warunkami pierwszego rzędu będą:

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} + \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} + \lambda p_2 = 0$$
$$x_1 p_1 + x_2 p_2 - B = 0$$

Rozwiązując powyższe równania mamy:

$$\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} + \lambda p_1 = 0$$
$$x_1^{\alpha} \beta x_2^{\beta-1} + \lambda p_2 = 0$$
$$x_1 p_1 + x_2 p_2 - B = 0$$

Przenosimy wyrażenie λp na drugą stronę:

$$\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} = -\lambda p_1$$
$$x_1^{\alpha} \beta x_2^{\beta-1} = -\lambda p_2$$

Możemy przenieść p_1 i p_2 na lewą stronę aby zrównać oba równania z lambdą:

$$\frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}}{p_1} = -\lambda$$
$$\frac{x_1^{\alpha} \beta x_2^{\beta-1}}{p_2} = -\lambda$$

Następnie zrównujemy lewe strony równania pozbywając się lambdy i przenosząc p_1 oraz p_2 na prawą stronę:

$$\frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}}{p_1} = \frac{x_1^{\alpha} \beta x_2^{\beta-1}}{p_2}$$
$$\frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}}{x_1^{\alpha} \beta x_2^{\beta-1}} = \frac{p_1}{p_2}$$

Lewą stronę można uprościć skracając potęgi: x_1^{α} w mianowniku skraca się z $x_1^{\alpha-1}$ do x_1, natomiast x_2^{β} w liczniku skraca się z $x_1^{\beta-1}$ do x_2. Z tego mamy:

$$\frac{\alpha x_2}{\beta x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

Przenosimy x_1 na prawą stronę, a p_2 na lewą stronę aby wyznaczyć $x_1 p_1$:

$$\frac{\alpha}{\beta} x_2 p_2 = x_1 p_1$$

Wyrażenie to możemy podstawić do ograniczenia firmy aby pozbyć się x_1 i p_1:

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 = B$$
$$\frac{\alpha}{\beta} x_2 p_2 + x_2 p_2 = B$$

Teraz można zastosować trick - przemnożenie $x_2 p_2$ przez ułamek $\frac{\beta}{\beta}$, czyli przez jeden pozwoli nam włączyć to wyrażenie do wspólnego ułamka:

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta} x_2 p_2 = B$$

Rozwiązanie problemu producenta ma zatem postać:

$$x_1 p_1 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} B$$

$$x_2p_2 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}B$$

$$x_1^* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{B}{p_1}$$

$$x_2^* = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{B}{p_2}$$

Z powyższych równań możemy wywnioskować, że optymalny poziom zużycia czynnika x_1 i x_2 zależy od wartości α i β, cen poszczególnych czynników produkcji oraz wysokości nakładów B. Przy założeniu $\alpha + \beta = 1$ otrzymujemy bardzo elegancki wynik:

$$\begin{cases} x_1^* = \alpha\frac{B}{p_1} \\ \\ x_2^* = \beta\frac{B}{p_2} \end{cases} \tag{2}$$

3 Minimalizacja kosztów

Kolejnym zagadnieniem są koszty. Każda firma będzie dążyć do ich minimalizacji, niezależnie czy działa na rynku konkurencji doskonałej, jest monopolistą, czy w każdej innej strukturze rynku. Minimalizacja kosztów i maksymalizacja zysków to dwie strony tej samej monety. W poprzednim rozdziale wybieraliśmy poziom produkcji przy zadanych kosztach, ale ten sam problem można rozwiązać przyjmując zadany poziom produkcji y. Problem firmy możemy zapisać jako:

$$\boldsymbol{c}(y) = min[x_1w_1 + x_2w_2] \tag{3}$$

takie, że $f(x_1, x_2) = y$ - czyli produkcja jest w tym problemie zadana. Z zasady firma maksymalizująca zyski będzie minimalizowała koszty.
Wyobraźmy sobie sytuację, w której firma X ponosi koszty w wysokości 10 jednostek, a ze sprzedaży swojej produkcji otrzymuje taki sam utarg. Jej zysk π równy będzie zeru. Co jednak cieakwe, firma nie minimalizuje swoich kosztów. Nierozważny główny księgowy firmy X nie zauważył, że istnieje możliwość pomniejszenia kosztów o 1 przy utrzymaniu produkcji na tym samym poziomie. Gdy firma zatrudniła nowego głównego księgowego, który naprawił błąd swojego poprzednika, jej koszty zmniejszyły się do poziomu $c(y) = 9$, a zysk wzrósł tym samym do poziomu $\pi = 1$. Dopiero po zminimalizowani swoich kosztów przedsiębiorstwo osiągnęło maksymalny zysk. Własność tę da się również wykazać matematycznie za pomocą mnożników Lagrange'a, ale ponieważ rozwiązaliśmy już ten problem w pierwszej części, nie będziemy zajmować się tym w niniejszym rozdziale.

Rozpatrzmy natomiast problem firmy, która posiada dwie hale produkcyjne. Hale te cechują się innymi funkcjami kosztów, które można zapisać następująco:

$$c_1 = 4\sqrt{q_1}$$

$$c_2 = 2\sqrt{q_2}$$

Produkcja w obu halach musi być tożsama z produkcją całkowitą przedsiębiorstwa:

$$q_1 + q_2 = q$$

Aby koszt wytwarzanych dóbr był optymalny, koszt krańcowy w jednej i w drugiej hali musi być równy:

$$MC_1 = MC_2$$

Wyznaczmy zatem pochodne funkcji kosztów obu hal:

$$MC_1 = \frac{\partial c_1}{q_1},\ MC_2 = \frac{\partial c_2}{q_2}$$

$$MC_1 = \partial\, 4q^{\frac{1}{2}} = 4 * \frac{1}{2}q^{-\frac{1}{2}} = 2q^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{q^{\frac{1}{2}}}$$

$$MC_2 = \partial\, 2q^{\frac{1}{2}} = 2 * \frac{1}{2}q^{-\frac{1}{2}} = q^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}}$$

Z założenia $MC_1 = MC_2$ mamy:

$$\frac{2}{q_1^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{q_2^{\frac{1}{2}}}$$

Podnosimy obie strony do kwadratu:

$$\frac{4}{q_1} = \frac{1}{q_2}$$

$$4q_2 = q_1$$

Podstawiamy $4q_2$ za q_1 do naszego założenia $q_1 + q_2 = q$, stąd mamy:

$$q = 4q_2 + q_2 = 5q_2 = \frac{5}{4}q_1$$

$$q_1 = \frac{4}{5}q, \quad q_2 = \frac{1}{5}q,$$

Wynik sugeruje, że $\frac{4}{5}$ produkcji powinno zostać ulogowane w pierwszej hali. Jest to rozwiązanie nieefektywne, ponieważ z funkcji kosztów c_1 wiadomo, że pierwsza hala jest dwa razy droża niż druga. Produkując w obu halach badamy funkcję kosztów postaci $c(q) = 4\sqrt{q}+2\sqrt{q}$. Jest to funkcja wklęsła na całej dziedzinie (nie istnieje lokalne minimum), dlatego wybieramy rozwiązanie brzegowe - optymalne koszty produkcji uzyskamy produkując tylko w hali drugiej. Wówczas struktura kosztów ma postać:

$$c = 2\sqrt{q} \tag{4}$$

4 Konkurencja doskonała

Konkurencja doskonała istnieje tylko na stronach podręczników mikroekonomii, bo w rzeczywistości taka struktura rynku nie występuje. W konkurencji doskonałej działa nieskończenie wiele firm, które produkują identyczne dobra (konsument może bez żadnych konsekwencji zmienić dostawcę). Zysk π przedsiębiorstw działających na takim rynku zawsze wynosi zero, tj. jest równy kosztom ponoszonym przez firmy. Ostatnie z założeń jest chyba najważniejsze w kontekście rozwiązywania zadań - widząc hasło "konkurencja doskonała" należy przyjąć "zysk $\pi = 0$".

Rozważmy przedsiębiorstwo działające na rynku doskonale konkurencyjnym o następującej funkcji produkcji:

$$q = f(L) = 2L^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

Należy wyznaczyć wielkość podaży $x(p, w)$ firmy, gdzie p jest ceną sprzedaży dobra, a w oznacza wysokość wynagrodzenia czynnika produkcji L.
Mając powyższe informacje możemy wyznaczyć zysk firmy:

$$\pi = p * 2L^{\frac{1}{2}} - w * L$$

gdzie $p * 2L^{\frac{1}{2}}$ to przychód całkowity (cena produkowanego dobra razy jego ilość), a $w * L$ to koszty całkowite firmy (cena pracy razy ilość wykorzystywanych jednostek pracy).
Różniczkujemy po q:

$$\frac{\partial f}{\partial L} = p * L^{-\frac{1}{2}} - w$$

$$p * L^{-\frac{1}{2}} - w = 0$$

Upraszczamy równanie:

$$p * L^{-\frac{1}{2}} = w$$

$$L^{-\frac{1}{2}} = \frac{w}{p}$$

$$\frac{1}{L^{\frac{1}{2}}} = \frac{w}{p}$$

Mnożymy przez $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2L^{\frac{1}{2}}} = \frac{w}{2p}$$

A następnie podstawiamy q za $2L^{\frac{1}{2}}$:

$$\frac{1}{q} = \frac{w}{2p}$$

Otrzymujemy wynik:

$$q^* = \frac{2p}{w}$$

5 Monopol

Monopol jest strukturą rynku, którą łatwiej sobie wyobrazić, ponieważ faktycznie występuje w rzeczywistości. W monopolu działa tylko jedna firma, która ze względu na swoją pozycję może dyktować i różnicować ceny.

Rozpatrzmy problem monopolisty, który dostarcza alkohol do kasyn i klubów nocnych. Popyt w hasynach równy jest $240 - 2p_k$, a popyt w klubach wynosi $40 - \frac{1}{2}p_n$. Jedynym kosztem związanym z przemytem alkoholu jest łapówka, którą mafia musi zapłacić komendantowi policji - 20 jednostek od każdej butelki (są to nasze koszty krańcowe). Mafia może różnicować ceny, ponieważ klienci nie zmienią miejsca spędzania czasu nawet jeżeli cena alkoholu będzie znacząco różnić się między lokalami. Z tego względu monopolista rozpatruje problem osobno dla każdego lokalu.

$$\begin{cases} D_k(p_k) = 240 - 2p_k \\ \\ D_n(p_n) = 40 - \frac{1}{2}p_n \end{cases} \tag{6}$$

Rozwiążmy problem kasyn. Funkcja podaży będzie równa q:

$$q = 240 - 2p$$

$$2p = 240 - q \qquad p = 120 - \frac{1}{2}q$$

Przychody całkowite z kasyn to jednostkowa cena razy podaż, czyli:

$$TR = p * q = (120 - \frac{1}{2}q) * q$$

MR to pochodna z TR, a więc mamy:

$$MR = 120 - \frac{1}{2} * 2q$$

$$MR = 120 - q$$

Podczas rozwiązywania zadań nie trzeba wykonywać trzech powyższych rachunków, można po prostu założyć, że przy wyliczaniu MR zawsze trzeba pomnożyć współczynnik przy q przez dwa:

$$p = 120 - \frac{1}{2}q => MR = 120 - q$$

$$MR = MC => 120 - q = 20$$

$$\begin{cases} q^* = 100 \\ p^* = 70 \end{cases} \tag{7}$$

Zysk monopolisty z kasyn jest równy:

$$\pi = 100 * (70 - 20) = 5000$$

Tym samym sposobem rozwiązujemy problem dla klubów nocnych. Z funkcji podaży mamy:

$$q = 40 - \frac{1}{2}p$$

$$p = 80 - 2q$$

Stosując powyższą logikę, mnożymy współczynnik przy q aby uzyskać wartość MR:

$$MR = 80 - 4q$$

Koszty krańcowe wynoszą 20, więc przyrównujemy powyższe równanie do tej kwoty:

$$MR = MC => 80 - 4q = 20$$

$$60 = 4q \qquad q = 15$$

$$p = 80 - 2q = 80 - (2 * 15) = 50$$

$$\begin{cases} q^* = 15 \\ p^* = 50 \end{cases} \tag{8}$$

Zysk z klubów nocnych wynosi zatem:

$$\pi = 15 * (50 - 20) = 450$$

Zysk całkowity z obu lokali:

$$\pi_t = 5000 + 450 = 5450$$

Rozpatrzmy teraz przypadek, w którym mafia nie różnicuje cen i traktuje oba łącznie. W takim przypadku należy zsumować obie funkcje podaży:

$$Q = 240 - 2p + 40 - 0,5p = 280 - 2\frac{1}{2}p$$

Rozwiązujemy ten problem klasycznie. Najpierw należy wyznaczyć p, a potem zrównać p z MC:

$$2\frac{1}{2}p = 280 - q$$

$$p = 112 - \frac{2}{5}q$$

Mnożymy współczynnik przez dwa:

$$MR = 112 - \frac{4}{5}q$$

Podobnie jak wcześniej, MC równają się 20:

$$MR = MC => 112 - \frac{4}{5}q = 20$$

$$\frac{4}{5}q = 92 \qquad q^* = 115$$

$$p^* = 112 - \frac{2}{5} * 115 = 66$$

Zysk całkowity wynosi $q * (p - MC)$:

$$\pi_t = 115 * (66 - 20) = 115 * 46 = 5290$$

Jak widać różnicowanie cen przekłada się na wymierną korzyść dla mafii - może ona zarobić o 160 jednostek więcej, niż gdyby nie różnicowała cen.

6 Podatek Pigou

Aby zrozumieć czym jest podatek Pigou, najpierw należy wprowadzić pojęcie efektów zewnętrznych. Wiele gałęzi gospodarki, szczególnie w sektorze przemysłowym, znacząco wpływa swoją produkcją na środowisko, na przykład emitując dwutlenek węgla do atmosfery lub nielegalnie pozbywając się toksycznych produktów ubocznych. Sprawiedliwym wydaje się zatem, aby koszty usunięcia zanieczyszczeń pokrywał producent.

Rozważmy problem fabryki celulozy. Funkcja odwrotnego popytu ma postać $D(q) = 280 - 2q$. Koszty krańcowe wynoszą $MC_F(q) = 2q$. Fabryka generuje koszy zewnętrzne w wysokości $MC_S(q) = q$. Najpierw załóżmy, że fabryka działa na rynku konkurencji doskonałej. Policzmy p i q w punkcie równowagi bez założenia o efektach zewnętrznych - firma produkuje i wydala odpady do rzeki bez żadnych konsekwencji:

$$MC = p \quad => \quad 2q = 280 - 2q$$

$$4q = 280$$

$$q^* = 70$$

$$p^* = 280 - (2 * 70) = 140$$

Policzmy teraz ilość oraz cenę społecznie optymalną, czyli gdyby fabryka uwzględniała generowane przez siebie efekty zewnętrzne:

$$MC_F + MC_S = p \quad => \quad 2q + q = 280 - 2q$$

$$5q = 280 \qquad q^* = 56$$

Wprowadzenie podatku:

$$D(q) = MC_F + T$$

$$280 - 2q = 2q + T$$

Po uproszczeniu uzyskujemy wynik:

$$T = 280 - 4q$$

$$q^* = 56$$

$$p^* = 168$$

Wartość podatku, który państwo powinno nałożyć na fabrykę wynosi:

$$T = 280 - (4 * 56) = 56$$

Widzimy, że wartość podatku ($T = 56$) i koszty krańcowe ($MC = 2q = 112$) są równe cenie - zysk fabryki będzie równy zero, co jest zgodne z założeniem, że firma działa na rynku konkurencji doskonałej.

Aby rozwiązać problem fabryki celulozy, która zachowuje się jak monopolista, należy zastosować logikę z zadania z przemytem alkoholu.